V-58 (15 min) 11-julio-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Hipervolumen: escalar invariante** Relación entre Jacobiano y Métrica

Supongamos una variedad 4D descrita con coordenadas: $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, donde un diferencial de Hipervolumen se podría expresar: $\boldsymbol{dV_{Hiper} = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}$.
Si cambiamos a otras coordenadas para describir la variedad: $p^\mu \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3)$, el mismo diferencial de Hipervolumen, expresado con las nuevas coordenadas será:

$$\boldsymbol{dV_{Hiper} = \sqrt{|g|}\ dp^0 dp^1 dp^2 dp^3} \qquad \textbf{(I)}$$

Siendo $|\boldsymbol{g}|$ el módulo del determinante de la métrica con las nuevas coordenadas.

Justificamos la expresión anterior como generalización del caso sencillo de plano 2D y diferencial de área dA. En coordenadas cartesianas: $\boldsymbol{dA = dx\, dy}$
Si cambiamos a otras coordenadas (por ejemplo, coordenadas polares) con ecuaciones de transformación conocidas $\boldsymbol{x = x(r,\theta)}$; $\boldsymbol{y = y(r,\theta)}$ se sabe que, para obtener el mismo diferencial de área con las nuevas coordenadas, hay que multiplicar por el determinante de la matriz Jacobiano: $\boldsymbol{dA = |J|\, dr\, d\theta}$.

Siendo $J = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{|J| = \partial_r x\, \partial_\theta y - \partial_r y\, \partial_\theta x}$ **(II)**

Vamos a comprobar, en este caso sencillo, que el determinante del Jacaobiano es igual a la raíz cuadrada del determinante de la métrica con las nuevas coordenadas:

Según vimos en el video 2, la base con nuevas coordenadas se obtiene: $\vec{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \vec{e}_i$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_r &= \partial_r x\, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \partial_r y\, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \\ \vec{e}_\theta &= \partial_\theta x\, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \partial_\theta y\, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \end{aligned}\right\} \text{La métrica es: } g_{r\theta} = \begin{pmatrix} \vec{e}_r\cdot\vec{e}_r & \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_r & \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_r x)^2 + (\partial_r y)^2 & \partial_r x\, \partial_\theta x + \partial_r y\, \partial_\theta y \\ \partial_r x\, \partial_\theta x + \partial_r y\, \partial_\theta y & (\partial_\theta x)^2 + (\partial_\theta y)^2 \end{pmatrix}$$

Ahora hallamos el determinante de la métrica con las nuevas coordenadas:

$$|g_{r\theta}| = (\partial_r x)^2(\partial_\theta x)^2 + (\partial_r x)^2(\partial_\theta y)^2 + (\partial_r y)^2(\partial_\theta x)^2 + (\partial_r y)^2(\partial_\theta y)^2 -$$

$$-(\partial_r x\, \partial_\theta x)^2 - \partial_r x\, \partial_\theta x\, \partial_r y\, \partial_\theta y - \partial_r y\, \partial_\theta y\, \partial_r x\, \partial_\theta x - (\partial_r y\, \partial_\theta y)^2$$

Eliminando términos y simplificando queda:

$$|\boldsymbol{g_{r\theta}}| = (\partial_r x\, \partial_\theta y)^2 - 2\cdot \partial_r x\, \partial_\theta x\, \partial_r y\, \partial_\theta y + (\partial_r y\, \partial_\theta y)^2 = (\partial_r x\, \partial_\theta y - \partial_r y\, \partial_\theta y)^2 = \boldsymbol{|J|^2}$$

Al comparar con la expresión **(II)** del determinante del jacobiano vemos que, en este caso, el determinante del jacobiano es igual a la raíz cuadrad de la métrica con las nuevas coordenadas.

Generalizamos ese resultado (habría que hacer una demostración más rigurosa) y, si llamamos $\boldsymbol{g}$ al determinante de la métrica, ponemoss:

$$\text{En variedades que } g>0 \rightarrow \boldsymbol{|J| = \sqrt{g}}$$

$$\textbf{(III)}$$

$$\text{En variedades que } g<0 \rightarrow \boldsymbol{|J| = \sqrt{-g}}$$

En el espacio tiempo de 4D (el determinante de la métrica es negativo) justificamos lo expresado en **(I)**:

$$\boldsymbol{dV_{Hiper} = \sqrt{-g}\ (dp)^4}$$

Si estuviéramos en una variedad plana el módulo determinante de la métrica valdría 1, así que en general para cualquier variedad de dimensión $\boldsymbol{D}$ y coordenadas $\boldsymbol{x^\mu}$, se puede expresar el elemento de área, hiperárea, volumen o hipervolumen, como:

$$\boldsymbol{dV = \sqrt{|g|}\,(dx)^D} \qquad \textbf{(IV)}$$